局在スピンの帯磁率について

川村, 清

局在スピンの帯磁率について

東大理* 川 村 清

（9月1日受理）

Abstract

(1) localized spin の帯磁率を，ある種の spin Green 関数を使って表わす公式を提案する。

(2) log | T／D | についての most－singular term をあつめて，温度依存性についてのよく知られた形を，任意の S について，（J／N）については，任意の次数まで正しい結果を，単純な摂動の方法で求める。

(3) 簡単な仮定をおくと spin quenching が出ることを示す。

(4) self－energy part の next－singular terms を与える。

§ 1. Introduction

前の論文[1]（以下 I と呼ぶ）において筆者は，self－energy part に対する next singular terms について考察した。ここでは，その時 $(J/N)^2$ まで求めた dynamical susceptibility の式を J の高次を含めて求めようとする。

static susceptibility の温度依存性は，Yosida－Okiji の論文[2]で予想されるが，彼らが J^4 までの計算から求めた式を，任意の次数まで求められるような公式を与え，また，その結果を与えることは意味がないことはない。われわれの方法では，self－energy part の $\epsilon = T_K$ における発散と，帯磁率の $T \leqq T_K$ における unphysical な振舞との関係も判り，したがって self－energy part が $\epsilon = T_K$ で resonance type であれば spin quenching が出て来るということが判る。

I で示したように，self－energy part の next singular terms は，dynamical susceptibility を使ってあらわされる。そこで，上記の帯磁率の式を使って，self－energy part の表式を，next singular

---

* この仕事の一部は，物性研で行われた。

①－外高

term まで求める。結果は，most−singular term まで正しい Abrikosov の式[3] に $Q(\varepsilon)$ をかけたものになる。ここで $Q(T)$ は帯磁率の分母に来る factor である。

§2. 展　開　公　式

よく知られているように[4] 帯磁率は，

$$\langle\langle S_z(\omega),\ S_z(-\omega)\rangle\rangle \equiv \frac{T}{2}\int_{-1/T}^{1/T}\langle\langle S_z(\tau),\ S_z(\tau')\rangle\rangle \times \exp\left[i\omega\tau - i\omega\tau'\right] d\tau d\tau' \qquad (1)$$

を計算すれば求まる。等方的な系では（1）の代りに

$$\langle\langle (\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}(\omega),\ (\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\beta\alpha}(-\omega)\rangle\rangle \equiv \mathcal{S}^{(1)}(\omega) \qquad (2)$$

と（1）とは比例している。そこで以下では（2）の $\mathcal{S}^{(1)}(\omega)$ を計算する。I では（2）を（J／N）で展開した leading term の式を示したが，同様の手法で，$\omega \neq 0$ なら（J／N）についての higher order term は，次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(1)}(\omega) &= -i(-i\omega)^{-1}\sum_{n=3}^{\infty}(-J/N)^{n-1}T^{n-1}\Sigma_{\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_{n-1}}\Sigma_{pp'} \\ &\times (i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}\prod_{j=3}^{n-1}(i\varepsilon_j-\varepsilon_{p_j})^{-1} \\ &\times \mathcal{S}^{(2)}(\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_3\cdots\cdots,\varepsilon_{n-1},\omega) \qquad (3a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(2)}(\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_3\cdots\cdots,\varepsilon_{n-1},\omega) &= \langle\langle S_1(\omega-\varepsilon+\varepsilon'),\ S_2(\varepsilon-\varepsilon_3),\ \cdots\cdots,\ S_{n-1}(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon'), \\ &\qquad S_n(-\omega)\rangle\rangle \qquad (3b)\end{aligned}$$

$$S_1 = (\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\gamma\delta}, \quad S_2 = (\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\delta\alpha_1}, \cdots\cdots,$$

$$S_{n-1} = (\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha_{n-1}\gamma}, \quad S_n = (\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\beta\alpha} \qquad (3c)$$

$n \geqq 5$ の時，次の運動方程式が成りたつ。

$$\mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_3, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-1}, \omega)$$
$$= 2\,[\mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_3, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-3}, \varepsilon_{n-1}, \omega)$$
$$- \mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_3, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-3}, \varepsilon_{n-2}, \omega)](i\varepsilon_{n-1} - i\varepsilon_{n-2})^{-1}$$
$$- \delta_{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-2}} \sum_{\varepsilon_{n-1} \neq \varepsilon_{n-2}} \mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_3, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-1}, \omega) \qquad (4)$$

そこで，

$$T^{n+}\sum_{\varepsilon_3 \cdots\cdots \varepsilon_{n-1}} \mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_3, \cdots\cdots, \varepsilon_{n-1}, \omega)$$
$$\times \prod_{j=3}^{n-1} (i\varepsilon_j - \varepsilon_{p_j})^{-1}$$
$$= \sum_{k=3}^{n-1} \left\{ T\sum_{\varepsilon_k} (i\varepsilon_k - \varepsilon_{p_k})^{-1} \left[\prod_{j=3}^{n-1}{}^{(k)} (\varepsilon_{p_k} - \varepsilon_{p_j})^{-1} \mathrm{th}(\varepsilon_{p_j}/2T) \right] \right.$$
$$\left. \times\, \mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_k, \omega) \right\} \qquad (5)$$

(5) に出て来た $\mathscr{S}^{(2)}$ は，次のように解く。まず，今は $\omega \neq 0$ 故

$$\mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_k, \omega)$$
$$= (i\omega)^{-1} [\langle\langle [S_4, S_1](\varepsilon' - \varepsilon), S_2(\varepsilon - \varepsilon_k), S_3(\varepsilon_k - \varepsilon') \rangle\rangle$$
$$+ \langle\langle S_2(\omega - \varepsilon + \varepsilon'), [S_4, S_2](\varepsilon - \varepsilon_k - \omega), S_3(\varepsilon_k - \varepsilon') \rangle\rangle$$
$$+ \langle\langle S_1(\omega - \varepsilon + \varepsilon'), S_2(\varepsilon - \varepsilon_k), [S_4, S_3](\varepsilon_k - \varepsilon' - \omega) \rangle\rangle] \qquad (6)$$

(6) に出て来た commutator を求めよう。簡単に判るのは，

$$[S_4,\ S_2] = [(\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\beta\alpha},\ (\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\delta\alpha_1}]$$

$$= i\,\mathbf{S}\cdot(\sigma_{\beta\alpha}\times\sigma_{\delta\alpha_1}) \tag{7a}$$

$$[S_4,\ S_3] = [(\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\beta\alpha},\ (\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\alpha_1\gamma}]$$

$$= i\,\mathbf{S}\cdot(\sigma_{\beta\alpha}\times\sigma_{\alpha_1\gamma}) \tag{7b}$$

更に

$$[S_4,S_1] = (\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\beta\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\cdot(\mathbf{S}\times\sigma_{\gamma\delta})$$

$$-\ \sigma_{\beta\alpha}(\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\beta\alpha}\cdot(\mathbf{S}\times\sigma_{\gamma\delta})$$

$$= 2i(\mathbf{S}\cdot\sigma_{\gamma\delta})\,\delta_{\beta\beta} = 4i(\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\gamma\delta} \tag{7c}$$

ここで使った公式は I に出ている。Spin Green 関数の運動方程式から容易に，

$$T^2\Sigma_\varepsilon\ \varepsilon_k(i\varepsilon_k-\varepsilon_{p_k})^{-1}(i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1} \ll [S_4,\ S_1](\varepsilon'-\varepsilon),$$

$$\cdots\cdots\ S_3(\varepsilon_k-\varepsilon')\gg$$

$$= 4iT\Sigma_{\varepsilon_k}(i\varepsilon_k-\varepsilon_{p_k})^{-1}(\varepsilon_{p_k}-\varepsilon_p)^{-1}\,\mathrm{th}(\varepsilon_p/2T)$$

$$\times \ll (\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\alpha\beta}(\varepsilon'-\varepsilon_k),\quad (\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\beta\alpha}(\varepsilon_k-\varepsilon')\gg$$

$$+\ 4iT\Sigma_\varepsilon(i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1}(\varepsilon_p-\varepsilon_{p_k})^{-1}\,\mathrm{th}(\varepsilon_{p_k}/2T)$$

$$\times \ll (\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\alpha\beta}(\varepsilon'-\varepsilon),\quad (\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\beta\alpha}(\varepsilon-\varepsilon')\gg \tag{8}$$

(6) の右辺最後の項を計算するには $[S_2,\ S_1]$ と $[S_2,\ [S_4,\ S_3]]$ が必要であるが

$$[S_2,\ [S_4,S_3]] = i(\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\delta\alpha_1}\sigma_{\alpha_1\gamma}\cdot(\mathbf{S}\times\sigma)_{\beta\alpha}$$

$$-\ i(\mathbf{S}\times\sigma)_{\beta\alpha}\cdot\sigma_{\alpha_1\gamma}(\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\delta\alpha_1}$$

$$= -2(\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\beta\alpha}\delta_{\delta\gamma} + i\,\mathbf{S}\cdot(\sigma_{\delta\gamma}\times\sigma_{\beta\alpha}) \tag{9a}$$

$$[S_2,\ S_1] = 2i(\mathbf{S}\cdot\sigma)_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\alpha_1} + \mathbf{S}\cdot(\sigma_{\delta\alpha_1}\times\sigma_{\alpha\beta}) \tag{9b}$$

これを使うと

$$
\begin{aligned}
&T^2\Sigma_{\varepsilon,\varepsilon_k}(i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon_k-\varepsilon_{p_k})^{-1}\ll S_1(\omega-\varepsilon+\varepsilon'),\\
&\qquad\cdots\cdots[S_4,S_3](\varepsilon_k-\varepsilon'-\omega)\gg\\
&=-iT\Sigma_{\varepsilon_k}(i\varepsilon_k-\varepsilon_{p_k})^{-1}(\varepsilon_{p_k}-\varepsilon_p)^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{th}(\varepsilon_p/2T)\right)\\
&\qquad\times\ll(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\delta}(\omega-\varepsilon_k+\varepsilon'),\\
&\qquad\qquad(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\beta\alpha})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma}(\varepsilon_k-\varepsilon'-\omega)\gg\\
&\quad-iT\Sigma_{\varepsilon_k}(i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1}(\varepsilon_p-\varepsilon_{p_k})^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{th}(\varepsilon_{p_k}/2T)\right)\\
&\qquad\times\ll(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\delta}(\omega-\varepsilon+\varepsilon'),(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\beta\alpha})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma}(\varepsilon-\varepsilon'-\omega)\gg
\end{aligned}
\tag{10}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
&T^2\Sigma_{\varepsilon_k\varepsilon'}(i\varepsilon_k-\varepsilon_{p_k})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}\\
&\qquad\times\ll S_1(\omega-\varepsilon+\varepsilon'),[S_4,S_2](\varepsilon-\varepsilon_k-\omega),S_3(\varepsilon_k-\varepsilon')\gg\\
&=-iT\Sigma_{\varepsilon'}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(\varepsilon_{p'}-\varepsilon_{p_k})^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{th}(\varepsilon_{p_k}/2T)\right)\\
&\qquad\times\ll(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\beta\alpha})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma}(\varepsilon-\varepsilon'-\omega),(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\delta}(\varepsilon'-\varepsilon+\omega)\gg\\
&\quad-iT\Sigma_{\varepsilon_k}(i\varepsilon_k-\varepsilon_{p_k})^{-1}(\varepsilon_{p_k}-\varepsilon_{p'})^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{th}(\varepsilon_{p'}/2T)\right)\\
&\qquad\times\ll(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\beta\alpha})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma}(\varepsilon-\varepsilon_k-\omega),(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\delta}(\varepsilon_k-\varepsilon+\omega)\gg
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ところで

$$
\begin{aligned}
&\ll(\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\beta\alpha})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma}(\omega),\ (\mathbf{S}\times\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta})\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\gamma\delta}(-\omega)\gg\\
&=4\ll(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}(\omega),(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\beta\alpha}(-\omega)\gg\cong-8S(S+1)\delta_{\omega 0}/T
\end{aligned}
$$

が成立するから

$$
\begin{aligned}
& T^3 \Sigma_{\varepsilon,\,\varepsilon'\,\varepsilon_k} (i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon_k-\varepsilon_{p_k})^{-1} \\
& \qquad\qquad \times \mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_k,\omega) \\
& = -4iS(S+1) \\
& \times \Big[T\Sigma_{\varepsilon'}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p_k})^{-1}(i\omega+i\varepsilon'-\varepsilon_{p_k})^{-1}(\varepsilon_{p_k}-\varepsilon_p)^{-1} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{th}(\varepsilon_p/2T) \\
& + T\Sigma_{\varepsilon'}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_p)^{-1}(i\omega+i\varepsilon'-\varepsilon_p)^{-1}(\varepsilon_p-\varepsilon_{p_k})^{-1} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{th}(\varepsilon_{p_k}/2T) \\
& - T\Sigma_{\varepsilon'}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon'-i\omega-\varepsilon_p)^{-1}(\varepsilon_p-\varepsilon_{p_k})^{-1} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{th}(\varepsilon_{p_k}/2T) \\
& - T\Sigma_{\varepsilon'}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p_k})^{-1}(i\varepsilon'-i\omega'-\varepsilon_{p_k})^{-1}(\varepsilon_{p_k}-\varepsilon_p)^{-1} \\
& \qquad\qquad\qquad \mathrm{th}(\varepsilon_p/2T)\Big] \qquad (12)
\end{aligned}
$$

(12) を (5) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
& T^{n-1}\Sigma_{\varepsilon,\,\varepsilon',\,\cdots\,\varepsilon_{n-1}} \mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_3\,\cdots\cdots,\varepsilon_{n-1}) \\
& \times \Sigma_{p\,p'}(i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}\prod_{j=3}^{n-1}(i\varepsilon_j-\varepsilon_{p_j})^{-1} \\
& = -4i\sum_{k=2}^{n-1}\Big[T\Sigma_{\varepsilon'p'}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p_k})^{-1}(i\omega+i\varepsilon'-\varepsilon_{p_k})^{-1} \\
& \qquad \times \prod_{j=2}^{n-1\,(k)}\{(\varepsilon_{p_k}-\varepsilon_{p_j})^{-1}\ \mathrm{th}(\varepsilon_{p_j}/2T)\Big]\,S(S+1) \\
& + 4iS(S+1)\sum_{k=2}^{n-1}\Big[T\Sigma_{\varepsilon'p'}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p_k})^{-1}(i\varepsilon'-i\omega-\varepsilon_{p_k})^{-1} \\
& \qquad \times \prod_{j=2}^{n-1\,(k)}\{(\varepsilon_{p_k}-\varepsilon_{p_j})^{-1}\ \mathrm{th}(\varepsilon_{p_j}/2T)\}\Big] \qquad (13)
\end{aligned}
$$

ただし，(13) で $\varepsilon_2\equiv\varepsilon$　$\mathbf{P}_2\equiv\mathbf{P}$ と定義した。上では $n\geqq5$ としたが，この計算で判るように $n=4$ でも構わない。

$n=3$ の時は，

$$\mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon,\varepsilon',\omega)$$

$$=(i\omega)^{-1}\left[\ll[S_3,S_1](\varepsilon'-\varepsilon),\ S_2(\varepsilon-\varepsilon')\gg\right.$$

$$\left.+\ll S_1(\omega-\varepsilon+\varepsilon'),\ [S_3,S_2](\varepsilon-\varepsilon'-\omega)\gg\right]$$

$$[S_3,\ S_1]=4i(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})_{\gamma\delta}$$

$$[S_3,\ S_2]=i(\boldsymbol{\sigma}_{\beta\alpha}\times\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma})\cdot\mathbf{S}$$

を使って，

$$T^2\Sigma_{\varepsilon\varepsilon'}\Sigma_{pp'}(i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}\mathscr{S}^{(2)}(\varepsilon,\varepsilon',\omega)$$

$$=8iS(S+1)T\Sigma_{\varepsilon pp'}(i\varepsilon-\varepsilon_p)^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon-i\omega-\varepsilon_{p'})^{-1} \tag{14}$$

上下対称の s − band では (14) は丁度 (13) に帰着する。

§ 3. Static Susceptibility

(13) を (3a) に代入すると

$$\mathscr{S}^{(1)}_{\alpha\alpha}(\omega)=-8S(S+1)(-i\omega)^{-1}\sum_{n=3}^{\infty}(-J/N)^{n-1}(n-2)$$

$$\times T\Sigma_{\varepsilon'p'p''}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p''})^{-1}(i\omega+i\varepsilon'-\varepsilon_{p''})^{-1}$$

$$\times\left\{\Sigma_p(\varepsilon_{p''}-\varepsilon_p)^{-1}\,\mathrm{th}(\varepsilon_p/2T)\right\}^{n-3}$$

$$=8S(S+1)(i\omega)^{-1}(-J/N)^2$$

$$\times T\Sigma_{\varepsilon'p'p''}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p'})^{-1}(i\varepsilon'-\varepsilon_{p''})^{-1}(i\omega+i\varepsilon'-\varepsilon_{p''})^{-1}$$

$$\times\left[1-(J/N)g(\varepsilon_{p''})\right]^{-2} \tag{15}$$

ここで

$$\mathscr{g}(\varepsilon_{p''}) = -\Sigma_p(\varepsilon_{p''}-\varepsilon_p)^{-1}\mathrm{th}(\varepsilon_p/2T) \qquad (16)$$

(15) は $\omega \neq 0$ のときにのみ成立するが，$\omega = 0$ のときの価は，Ｉで与えられた sum－rule

$$T\Sigma_\omega \mathscr{S}(\omega) = -2S(S+1) \qquad (17)$$

から求まる。(15) とＩで求めた帯磁率の表式とのちがいは，ε', ω によらない factor，$[1-(J/N)\mathscr{g}(\varepsilon_{p''})]^{-2}$ のみであるから，(15) を ε' で和をとり，つづいて，ω で和をとって得られる static susceptibility は，Ｉで得た結果に，上記の factor をかけておけばよい。したがって，一般に，

$$\mathscr{S}(\omega) = -2S(S+1)\delta_{\omega,0}/T$$
$$+ 2S(S+1)(-2J\rho/N)^2\iint \frac{f(\varepsilon')\ (1-f(\varepsilon''))}{(\varepsilon'-\varepsilon'')^2[1-(J/N)\mathscr{g}(\varepsilon'')]^2} d\varepsilon' d\varepsilon'' \frac{\delta_{\omega,0}}{T}$$
$$+ 2S(S+1)(-2J\rho/N)^2\iint \frac{f(\varepsilon') - f(\varepsilon'')}{(\varepsilon'-i\omega-\varepsilon'')(\varepsilon'-\varepsilon'')^2[1-(J/N)\mathscr{g}(\varepsilon'')]^2}$$
$$\times d\varepsilon' d\varepsilon'' \qquad (18)$$

(18) で各積分の前に $\mathscr{P}$ (主値) があるべきだが[1] これは，簡単の為に落してある。

(18) で static susceptibility の温度依存性を調べて見よう。(18) の右辺最後の項は，第２項の発散を防ぐだけだから[5] これは考えない。第２項で ε' についての積分を行うと

$$I(T) \equiv \int_{-D}^{D} \frac{(1-f(\varepsilon''))}{\varepsilon''[1-(J/N)\mathscr{g}(\varepsilon'')]^2} d\varepsilon'' \qquad (19)$$

が出る。ここで $T < \varepsilon''$ で $\mathscr{g}(\varepsilon'') \simeq 2\rho \log|\varepsilon''/D|$ を使うと，

$$I(T) \cong \int_{T}^{D} \frac{d\varepsilon''}{\varepsilon''[1-(2J\rho/N)\log|\varepsilon''/D|]^2}$$

$$= (1/2J\rho/N)[1-(1-(2J\rho/N)\log(T/D))^{-1}] \quad (20)$$

したがって (18) より

$$\mathscr{S}(\omega=0) \cong -2S(S+1)/T$$
$$\times [1-(2J\rho/N)\{1-(2J\rho/N)\log(T/D))^{-1}\}] \quad (21)$$

これは，Yosida and Okiji[(2)] の static な spin polarization に対応する帯磁率の温度変化の式である。彼らによって示されているように (21) は，$T \lesssim T_K$ で unphysical な振舞をする。それは，(19) の非積分関数が $T < T_K$ のとき，$\varepsilon'' = T_K$ で二重の極をもっているのにそれにかまわず形式的に積分してしまったからである。

いささか大胆すぎるが，上の困難を簡単な仮定をして除き得ることを示す。(18) は，spin Green 関数の運動方程式を解いて求められた。その時使った近似は self－energy part を求めたときと同じであるから，(18) の中の factor $[1-(J/N)g(\varepsilon'')]^{-2}$ は，self－energy part の中の同じ factor と，起源が同じである。ところで，self－energy part を less－divergent term まで求めた時に，次のような形をしていたと仮定する。

$$\Sigma_{p\uparrow}(z) \propto \Sigma_p (z-\varepsilon_p)^{-1}[(1-(J/N)g(\varepsilon_p))^2 + A]^{-1} \quad (22)$$

classical spin system なら

$$g = 0 \qquad A = (\Pi J\rho/N)^2 S(S+1)$$

になるから，

$$\lim_{S\to\infty} A(S) = (\Pi J\rho/N)^2 S(S+1) \quad (23)$$

S が小さい時は，S によらない部分もあるだろう。(22) が成りたては (18) でも次のおきかえをしなくてはならない。

$$[1-(J/N)g(\varepsilon'')]^2 \rightarrow [1-(J/N)g(\varepsilon'')]^2 + A \quad (24)$$

したがって

$$I(T) \cong \int_T^D \frac{d\varepsilon''}{\varepsilon''\{[1-(2J\rho/N)\log|\varepsilon''/D|]^2+A\}}$$

$$= -\frac{1}{(2J\rho/N)}\frac{1}{\sqrt{A}}\left[\tan^{-1}\frac{1-(2J\rho/N)\log|\varepsilon''/D|}{\sqrt{A}}\right]_T^D$$

$$= -\frac{1}{(2J\rho/N)}\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{A}}-\tan^{-1}\frac{1-(2J\rho/N)\log|T/D|}{\sqrt{A}}\right\} \tag{25}$$

$A \ll 1$ とする。$1-(2J\rho/N)\log|T/D| \cong 1$ の時，すなわち十分高温では，

$$I(T) = \frac{1}{(2J\rho/N)}\left\{1-\frac{1}{1-(2J\rho/N)\log|T/D|}\right\} \tag{26}$$

これは (21) と同等である。逆に

$T \cong 0$ で　$1-(2J\rho/N)\log|T/D| \ll -1$ ならば，

$$I(T) = -\frac{1}{(2J\rho/N)}\frac{1}{\sqrt{A}}\left[\Pi-\sqrt{A}\left(1-\frac{1}{1-(2J\rho/N)\log(T/D)}\right)\right] \tag{27}$$

特に $T=0$ では

$$I(0) = -\frac{1}{(2J\rho/N)}\frac{\Pi}{\sqrt{A}}$$

だが A は，もともと，second order の量であるから，

$$A \propto (T\rho/N)$$

故に (18) から，

$$\mathscr{S}(\omega=0,\ T\to 0) \propto \frac{1}{T}\left[1-\frac{\Pi}{\sqrt{B}}\right]+C\,\frac{1}{T\log T} \tag{28}$$

ここで B は $(J\rho/N)$ によらない量である。

以上の考察から，splf − energy part についての仮定 (22) (これは，system の安定性と矛盾しない) を使えば帯磁率に伴う困難も摂動論の枠の中で除き得ることが示唆される。

§ 4. self − energy part の next divergent terms

I において，われわれは，next divergent term までいれた，self − energy part の式は，

$$\Sigma_{p\uparrow}(i\varepsilon) = -N_i T \Sigma_{\varepsilon_1} \Sigma_{p_1} \frac{\mathscr{S}^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1)}{i\varepsilon_1 - \varepsilon_{p_1}} (-J/N)^2 \times \frac{1}{[1-(2J\rho/N)g(\varepsilon_{p_1})]^2} \tag{29}$$

で与えられることを示した。明らかに

$$\mathscr{S}^{(1)}_{\uparrow\uparrow}(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{1}{2}\mathscr{S}^{(1)}(\varepsilon - \varepsilon_1)$$

故，(18) の半分を (29) に代入すればよい。そこで

$$\begin{aligned}
\Sigma_{p\uparrow}(i\varepsilon) &= N_i S(S+1) \Sigma_{p'} \frac{1}{i\varepsilon - \varepsilon_{p'}} \frac{(J/N)^2}{[1-(J/N)g(\varepsilon_{p'})]^2} \\
&- N_i S(S+1)(J/N)^2 \Sigma_{p'} \frac{1}{i\varepsilon - \varepsilon_{p'}} \frac{1}{[1-(J/N)g(\varepsilon_{p'})]^2} \\
&\times (2J\rho/N)^2 \iint \frac{f(\varepsilon')[1-f(\varepsilon'')]}{(\varepsilon' - \varepsilon'')^2 [1-(J/N)g(\varepsilon'')]^2} d\varepsilon' d\varepsilon'' \\
&- N_i S(S+1)(J/N)^2 T \Sigma_{\varepsilon_1} \Sigma_{p'} \frac{1}{[1-(J/N)g(\varepsilon_{p'})]^2} \frac{1}{i\varepsilon_1 - \varepsilon_{p'}} \\
&\times (2J\rho/N) \iint \frac{\{f(\varepsilon') - f(\varepsilon'')\} d\varepsilon' d\varepsilon''}{(\varepsilon' - i\varepsilon + i\varepsilon_1 - \varepsilon'')(\varepsilon' - \varepsilon'')^2 [1-(J/N)g(\varepsilon'')]^2}
\end{aligned} \tag{30}$$

I の (3.2) を導いた方法で，(30) から

$$\Sigma_{p\uparrow}(i\varepsilon) = (J/N)^2 N_i S(S+1)\Sigma_{p'} \frac{1}{i\varepsilon-\varepsilon_{p'}} \frac{1}{[1-(J/N)g(\varepsilon_{p'})]^2}$$

$$-4N_i(J/N)^4 S(S+1)\Sigma_{p'} \frac{1}{i\varepsilon-\varepsilon_{p'}} \rho^2 \iint \frac{f(\varepsilon'')[1-f(\varepsilon''')]}{(\varepsilon''-\varepsilon''')(\varepsilon''-i\varepsilon+\varepsilon_{p'}-\varepsilon''')}$$

$$\times [1-(J/N)g(\varepsilon_{p'})]^{-2}[1-(J/N)g(\varepsilon''')]^{-2} d\varepsilon'' d\varepsilon'''$$

$$-4N_i\left(\frac{J}{N}\right)^4 S(S+1)\Sigma_{p'}\rho^2 \iint \frac{f(\varepsilon_{p'})[f(\varepsilon'')-f(\varepsilon''')]}{(\varepsilon''-\varepsilon''')^2(\varepsilon''-i\varepsilon+\varepsilon_{p'}-\varepsilon''')}$$

$$\times [1-(J/N)g(\varepsilon_{p'})]^{-2}[1-(J/N)g(\varepsilon''')]^{2} d\varepsilon'' d\varepsilon''' \qquad (31)$$

(31) で $i\varepsilon \to \varepsilon + i\delta$ とおいて，imaginary part は，

$$\mathscr{I}_m \Sigma_{p\uparrow}(\varepsilon+i\delta) = -\Pi\rho(J/N)^2 N_i S(S+1)[1-(J/N)g(\varepsilon)]^{-2}$$

$$+4\Pi N_i(J/N)^4 S(S+1)\rho^3 \iint f(\varepsilon'')[1-f(\varepsilon''')](\varepsilon''-\varepsilon''')^{-2}$$

$$\times [1-(J/N)g(\varepsilon''')]^{-2}\{[1-(J/N)g(\varepsilon)]^{-2}$$

$$-[1-(J/N)g(\varepsilon-\varepsilon''+\varepsilon''')]^{-2}\} \times d\varepsilon'' d\varepsilon'''$$

$$-4\Pi N_i(J/N)^4 S(S+1)\rho^3 \iint f(\varepsilon-\varepsilon''+\varepsilon''') \times [f(\varepsilon'')-f(\varepsilon''')]$$

$$\times (\varepsilon''-\varepsilon''')^{-2}[1-(J/N)g(\varepsilon-\varepsilon''+\varepsilon''')]^{-2}$$

$$\times [1-(J/N)g(\varepsilon''')]^{-2} d\varepsilon'' d\varepsilon''' \qquad (32)$$

(32) で $(\varepsilon''-\varepsilon''')^{-2}$ の factor は，2度積分すると logarithmic singularity を与えるから重要であるが，これが有効なのは $\varepsilon''-\varepsilon''' \simeq 0$ のところである。したがって $g(\varepsilon-\varepsilon''+\varepsilon''') \simeq g(\varepsilon)$ とおいてしまうと，

$$\mathscr{I}_m \Sigma_{p\uparrow}(\varepsilon+i\delta) = -\Pi\rho(J/N)^2 N_i S(S+1)[1-(J/N)g(\varepsilon)]^{-2}$$

$$\times [1+(2J\rho/N)^2 \iint f(\varepsilon-\varepsilon''+\varepsilon''')[f(\varepsilon'')(1-f(\varepsilon'''))-f(\varepsilon''')(1-f(\varepsilon''))]$$

$$\times (\varepsilon''-\varepsilon''')^{-2}\{1-(J/N)g(\varepsilon''')\}^{-2} d\varepsilon'' d\varepsilon'''] \qquad (33)$$

(33) で ε'' についての積分を行うと，（$\varepsilon<0$ として）

$$\int_0^{-\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon'''}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{(1-(2J\rho/N)\log|\varepsilon'''/D|)^2}\,d\varepsilon'''$$

$$+\int_{-D}^{0}\frac{1}{\varepsilon'''}\frac{1}{(1-(2J\rho/N)\log|\varepsilon'''/D|)^2}\,d\varepsilon'''$$

$$\cong\frac{1}{2J\rho/N}\;\frac{1}{1-(2J\rho/N)\log|\varepsilon/D|}$$

故に，§3の計算と同様に，次式を得る。

$$\mathscr{I}_m\Sigma_{p\uparrow}(\varepsilon+i\delta)=-\Pi\rho(J/N)^2N_iS(S+1)[1-(J/N)g(\varepsilon)]^{-2}$$
$$\times\left[1+(2J\rho/N)^2\log|\varepsilon/D|\{1-(2J\rho/N)\log|\varepsilon/D|\}^{-1}\right] \tag{34}$$

I で示したように，self－energy part の next singular terms は (29) のみから来るから，(34) は，next singular terms までではexact な式である。当然，$|\varepsilon|>T_K$ でのみ成りたつ式である。

References

(1) 川村　清　　物性研究　本号

(2) K. Yosida and A. Okiji, Prog. Theor. Phys. 34 (1965), 505.

(3) A. A. Abrikosov, Physics 2 (1965), 5.

(4) R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan, 12 (1957), 570.

(5) H. Miwa, Prog. Theor. Phys. 34 (1965), 1040.